Travaux Pratiques 8 : Matrices

En première année, les matrices seront peu utilisées en python : le but principal est de manipuler l'instruction `np.array()`, et de bien faire la différence entre les opérations coefficients par coefficients (déjà étudiées pour les vecteurs) et les opérations mathématiques définies sur les matrices.
Attention, pour certaines opérations, la bibliothèque `numpy` ne suffira plus ; il faudra également importer la bibliothèque `numpy.linalg` d'alias `al`.

Pour les 3 premiers exercices, taper les instructions une à une (dans l'ordre !) dans la console... et les comprendre toutes. Ne pas hésiter à annoter votre feuille.

Exercice 1: *Prise en main*

```
A=np.array([[2,10],[3,8]])
A
np.shape(A)
B=np.array([[-1,0],[2,2]])
B
A+B
2+A
3*A
np.exp(B)
np.sum(B)
A*B # attention, que faut-il constater ?
np.dot(A,B)
```

bonus : tester `A==B` et `B>=1`

Exercice 2: *coefficients et extraction*

```
A=np.array([[2,4,5],[-1,5,7],[3,-3,1]])
A
A[0,0]
A[1,2]=0
A
A[0,:]
A[:,2]
(on pourra remarquer que pour python, la colonne
A[:,2] est une matrice ligne)
A[:,2]=np.array([5,5,5])
A
```

Exercice 3: *retour sur les opérations*

`A=np.array([[1,-1],[2,3]])`

Comparer : `A*A, A**2, np.dot(A,A), al.matrix_power(A,2)`

Comparer `1/A, al.inv(A)`

Exercice 4:

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer (sur votre feuille) que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Déterminer l'inverse de P par python. Comparer avec le résultat trouvé au 1.
3. Calculer avec python le produit $P^{-1}AP$. Quelle forme particulière a-t-elle ?

Exercice 5:

1. A l'aide des matrices prédéfinies (`np.zeros(), np.ones(), np.eye()`), créer les matrices suivantes dans python sans les rentrer coefficient après coefficient :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Pour les matrices C et D, il sera nécessaire de faire plusieurs étapes.
2. `Inspiré d'Edhec E 2015`. Même question avec la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6:

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Conjecturer la forme de A^n à l'aide de python.
2. Démontrer alors votre conjecture (on pensera à 2 méthodes).

Exercice 7:

Résoudre le système $\begin{cases} x+y+z & =1 \\ 2x+4y+8z & =2 \\ 3x+9y+27z & =3 \end{cases}$ à l'aide de python.

Commencer par réaliser que le système correspond à une équation matricielle ...