Travaux Pratiques 9 : Simulations et Lois usuelles

Exercice 1: *Compléments*

Taper les instructions suivantes une à une dans la console, pour bien les comprendre. Ne pas hésiter à refaire plusieurs fois le programme.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
y=rd.randint(1,7,20)
y
a=(y==6)
a
np.sum(a)
np.sum(y<=2)
```

Exercice 2:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers d'un dé équilibré.
En utilisant l'exercice 1, écrire une fonction de paramètre d'entrée n qui simule les lancers et qui affiche le nombre de 1 obtenus (*il n'y aura donc pas de boucle for*).

Exercice 3: *Loi Binomiale*

1. Quelle expérience aléatoire permet de simuler une loi $\mathcal{B}(30, 0.6)$?
2. Méthode algorithmique : à l'aide d'une boucle `for`, écrire un programme qui simule "à la main" cette loi.
3. Utiliser l'exercice 1 pour trouver un programme sans boucle `for`, à l'aide `rd.random(N)`.
4. Quelle est la commande prédéfinie de python qui permet de faire la même chose ?
5. Effectuer plusieurs simulations pour vous faire une idée des "valeurs prises en pratique" par une telle loi.

Exercice 4: *Loi Géométrique*

1. Quelle expérience aléatoire permet de simuler une loi $\mathcal{G}(0.1)$?
2. A l'aide d'une boucle `while`, écrire un programme qui permet de simuler "à la main" une loi $\mathcal{G}(0.1)$.
3. Quelle est la commande prédéfinie de python qui permet de faire la même chose ?
4. Effectuer plusieurs simulations pour vous faire une idée des "valeurs prises en pratique" par une telle loi.
   Bonus : montrer que si X suit une loi géométrique, alors la suite $(P(X = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Exercice 5: `inspiré d'Edhec E 2015`

Un joueur réalise des lancers indépendants d'une pièce truquée donnant "pile" avec la probabilité p. On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile". Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que ce joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair. On appelle X la variable aléatoire égale au numéro de la boule extraite.

1. Montrer sur votre feuille que si $m \in \mathbb{N}$, m est pair ssi $2 * \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$.
   Variante pour réviser : soit $m \in \mathbb{N}$, alors m est pair ssi le reste de la division euclidienne de ..... par ..... vaut .....
2. Compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus.
   ```
   p=input('entrer p') ;
   N=......
   while .......:
       ..........
   X= ..............
   if ............... :
       .....................
   else:
       ......................
   ```
3. Raccourcir ce programme en utilisant la syntaxe `rd.geometric()`

Exercice 6: `Edhec E 2018`

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr. On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment. On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile", et on décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.

Partie informatique

1. Compléter le script `python` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = rd.randint(- -,- -)
x=1
if piece==0:
    lancer=rd.randint(- -,- -)
    while lancer==0:
        lancer=- - -
        x=- - -
elif piece==1:
    x=- - -
print(x)
```

2. Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Partie mathématiques

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère de plus la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face", et on convient de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.
6. Loi de $X + Y$.
   (a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$.
   (c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$
   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 : $P(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$